Bruss の最適停止定理について (不確実・不確定環境下における数理的意思決定とその周辺)

乾, 仁

数理解析研究所講究録
第 1802 巻 2012 年 274-280

Bruss の最適停止定理について

乾　仁（Hitoshi INUI）
(株)TGI フィナンシャル・ソリューションズ　先端金融工学センター
計量アナリスト　E-mail:h-inui@tgifs.co.jp

備考：本稿で示される内容ならびに意見は筆者に属し，(株)TGI フィナンシャル・ソリューションズの公式見解を示すものではありません.

謝意：学生時代，懇切丁寧にご指導いただいた現・京都大学の矢野孝次准授，興味深い Bruss の論文 [2] を教えていただいた芝浦工業大学の穴太克則教授のお名前を記して，ここに謝意を表します.

1　はじめに

第 2 章で紹介する Bruss[2] の最適停止定理は，Bruss[2] の当該部分の証明において，最も重要な部分で stopping island の理論を用いて議論されている．この理論は Chow-Robbins-Siegmund[4] で monotone class，穴太 [1] で単調停止問題と呼ばれている理論であるが，第 3 章で考察するように Bruss[2] の最適停止定理は単調停止問題ではない．従って，単調停止問題の理論を用いない別の証明が必要である．本論文の目的は，第 4 章において，単調停止問題の理論を用いない自己完結的な証明を与えることである．

2　Bruss の最適停止定理 (Odds-theorem)

問題 1. $I_1, I_2, \cdots$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された事象 $A_1, A_2, \cdots,$ の定義関数とする．$I_1, I_2, \cdots$ と順番に観測して行き，いずれか 1 つの I_k を採用する．その際，それより前の $I_j (j < k)$ を参照することはできるが，採用することはできないものとする．$I_k = 1$ のとき，k は成功時刻 (**success time**) であるという．なるべく採用時刻が最後の成功時刻であるようにするにはどのような採用ルールに従えばよいか.

時刻 k までの観測値 $I_1, I_2, \cdots, I_k$ から得られる情報の全体として，$I_1, I_2, \cdots, I_k$ から生成される $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族を

$$\mathcal{F}_k := \sigma(I_1, I_2, \cdots, I_k) \tag{2.1}$$

とおく．採用ルールは $(\mathcal{F}_k)$-停止時刻 ($(\mathcal{F}_k)$-stopping time)τ で与えられる．すなわち，τ は $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に値をとる確率変数であって，次を満たすものである.

$$\text{任意の } k = 1, 2, \cdots, n \text{ に対し}, \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k. \tag{2.2}$$

さて，終了時刻 n が与えられたとき，終了時刻 n までの採用ルール全体を

$$\mathcal{T}(n) = \{\tau : \tau \leq n\} \tag{2.3}$$

と書く．このとき，終了時刻 n まで観測を続ければ，最適であるか否かに関わらず I_n を採用せざるを得ない．問題 1. の定式化として，次の問題を考えよう．

問題 2. $\mathcal{T}(n)$ の部分集合 $\mathcal{T}$ に対し，あらゆる採用ルール $\tau \in \mathcal{T}$ にわたる

$$U(\tau) := P(I_\tau = 1; I_{\tau+1} = I_{\tau+2} = \cdots = I_n = 0) \tag{2.4}$$

を最大化するような採用ルール $\tau^* \in \mathcal{T}$ を $\mathcal{T}$ における最適ルール (**optimal rule**) といい，そのときの $U(\tau^*)$ を最適報酬 (**optimal reward**) と呼ぶ．τ^* および $U(\tau^*)$ を求めよ．

Bruss[2] は $I_1, I_2, \cdots$ が独立な場合に問題 2. を考え，次の結果を得た．

定理 1 (最適停止定理 [2]). $1 \leq j \leq n$ に対し

$$p_j := E(I_j),\ q_j = 1 - p_j,\ r_j = p_j/q_j \tag{2.5}$$

とし，待ち時間 (**waiting time**)w を

$$w = \sup \left\{ 1 \leq k \leq n : \sum_{j=k+1}^{n} r_j \geq 1 \right\} \tag{2.6}$$

と定める．ただし，$\sup \emptyset = 0$ と約束する．このとき，「待ち時間 w 以前は放棄して，w より後の最初の成功で止める」という採用ルール

$$\tau^* = \inf \{ k > w : I_k = 1 \} \wedge n \tag{2.7}$$

は最適ルールである．ただし $\inf \emptyset = \infty$ と約束する．このとき最適報酬は次で与えられる．

$$U(\tau^*) = \left(\prod_{j=w+1}^{n} q_j \right) \sum_{j=w+1}^{n} r_j. \tag{2.8}$$

ここで，

$$\sum_{j=k+1}^{n} r_j \begin{cases} \geq 1 & (k \leq w \text{ のとき}), \\ < 1 & (k > w \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.9}$$

であることに注意する．最後の成功時刻 (**last success time**)L を次で定める．

$$L := L^{(n)} := \sup\{ k \leq n : I_k = 1 \} \tag{2.10}$$

ただし，$\sup \emptyset = 0$ と約束する．

3 Bruss の最適停止定理と単調停止問題

本章では単調停止問題とその解である OLA 停止ルールを紹介する．また，重要な注意として，Bruss の最適停止問題は単調停止問題ではないことを示す．

3.1 単調停止問題と OLA 停止ルール

問題 3. フィルトレーション $\{F_k\}_{k=0,1,\cdots,n}$ に適合な非負確率過程 $\{Y_k\}_{k=1,\cdots,n}$ が所与とする．このとき全ての $\tau \in \mathcal{T}(n)$ の中で報酬 $U(\tau) = E[Y_\tau]$ を最大化する最適ルール τ は何か．

定義 1 (単調停止問題). 最適停止問題において

$$A_k = \{Y_k \geq E[Y_{k+1}|\mathcal{F}_k]\}, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{3.1}$$

が，確率 1 で次を満たすとき，最適停止問題は単調停止問題という．

$$A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = \Omega \tag{3.2}$$

定義 2 (OLA 停止ルール). OLA（**one-stage look-ahead**）停止ルール τ を次で定義する．

$$\tau = \inf\{k > 0 : Y_k \geq E[Y_{k+1}|\mathcal{F}_k]\} \wedge n. \tag{3.3}$$

定理 2. $n = 0, 1, \cdots$ に対し

$$E[\sup_n Y_n] < \infty \tag{3.4}$$

を仮定すると，有限期間単調停止問題において，OLA 停止ルールが最適ルールである．

3.2 Bruss の最適停止問題と単調停止問題に関する注意

問題 2 において

$$Y_k = P(L = k|\mathcal{F}_k) \tag{3.5}$$

と定義すれば，問題 3. に帰着する．実際，

$$E[Y_\tau] = \sum_{k=1}^{n} E[Y_k; \tau = k] \tag{3.6}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E[P(L = k|\mathcal{F}_k); \tau = k] \tag{3.7}$$

$$= P(L = \tau) \tag{3.8}$$

であるから，問題 2. は問題 3. に帰着することがわかった．ところで，

$$Y_k = P(L = k|\mathcal{F}_k) \tag{3.9}$$

$$= 1_{\{I_k=1\}} P(S_k = 0), \tag{3.10}$$

$$E[Y_{k+1}|\mathcal{F}_k] = P(I_{k+1}=1|\mathcal{F}_k)P(S_{k+1}=0) \tag{3.11}$$
$$= p_{k+1}P(S_{k+1}=0) \tag{3.12}$$

である．よって

$$Y_k \geq E[Y_{k+1}|\mathcal{F}_k] \iff 1_{\{I_k=1\}} \prod_{j=k+1}^{n} q_j \geq p_{k+1} \prod_{j=k+2}^{n} q_j \tag{3.13}$$
$$\iff 1_{\{I_k=1\}} \geq r_{k+1} \tag{3.14}$$

である．従って，Y_k の定義 (3.5) では単調停止問題になってはいない．

4 Bruss の最適停止定理の自己完結的な証明

4.1 単純な採用ルールのクラスにおける最適ルール

補題 1. $1 \leq k \leq n$ に対し

$$S_k := I_{k+1} + I_{k+2} + \cdots + I_n \tag{4.1}$$

とする．このとき

$$P(S_k = 0) = \prod_{j=k+1}^{n} q_j, \tag{4.2}$$

$$P(S_k = 1) = \left(\sum_{j=k+1}^{n} r_j\right)\left(\prod_{j=k+1}^{n} q_j\right) \tag{4.3}$$

であって，

$$P(S_k = 0) > P(S_k = 1),\ k > w, \tag{4.4}$$

$$P(S_k = 0) \leq P(S_k = 1),\ k \leq w. \tag{4.5}$$

補題 2. $0 \leq k \leq n-1$ に対し

$$\tau_k := \tau_k^{(n)} = \inf\{j > k : I_j = 1\} \wedge n \tag{4.6}$$

ただし $\inf \emptyset = \infty$ とする．このとき，

$$V(\tau_k) := P(L = \tau_k) = P(S_k = 1). \tag{4.7}$$

次の命題は，定理の理解の助けとなるので紹介しておく．

命題 1. $P(S_k = 1)$ は k について単峰であり，$k = w$ において最大値を達する．特に，

$$\mathcal{C}(n) := \{\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}\} \tag{4.8}$$

とおくと，$\mathcal{C}(n)$ における最適ルールは τ_w である．

4.2 途中で止めるならば，成功してから止めたほうがよい

「途中で止めるならば，成功時刻で止める」という採用ルールの全体 $\mathcal{T}_0(n)$ を

$$\mathcal{T}_0(n) = \{\sigma \in \mathcal{T}(n) : \sigma < n \text{ のとき } I_\sigma = 1\} \tag{4.9}$$

と定める．$\sigma \in \mathcal{T}(n)$ に対し

$$\tau_\sigma := \tau_\sigma^{(n)} = \inf\{k > \sigma : I_\sigma = 1\} \wedge n \tag{4.10}$$

とする．ただし，$\inf \emptyset = \infty$ である．

補題 3. σ が停止時刻ならば，τ_σ も停止時刻である．

命題 2. $\mathcal{T}_0(n)$ における最適ルールと $\mathcal{T}(n)$ における最適ルールは一致する．

4.3 最適停止定理の証明

w は (2.6) で定義された待ち時間であったことに注意する．

命題 3. $k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対し

$$\mathcal{T}_k(n) := \{\tau \in \mathcal{T}_0(n) : \tau > k\} \tag{4.11}$$

とおく．$s = 0, 1, \cdots, w-1$ のとき，$\mathcal{T}_s(n)$ と $\mathcal{T}_{s+1}(n)$ 双方における最適ルールは一致する．

証明. $\sigma \in \mathcal{T}_s(n)$ に対し

$$\widehat{\sigma} = \begin{cases} \tau_\sigma & (\sigma \le s \text{ のとき}), \\ \sigma & (\sigma \ge s+1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{4.12}$$

とする．このとき，

$$\widehat{\sigma} \in \mathcal{T}_{s+1}(n) \tag{4.13}$$

である．実際，定義より $\widehat{\sigma} > s+1$ であり，また，$k = s+2, s+3, \cdots, n$ のとき

$$\{\widehat{\sigma} \le k\} = \bigcup_{j=1}^{s} \{\widehat{\sigma} \le k\} \cap \{\sigma = j\} + \bigcup_{j=s+1}^{n} \{\widehat{\sigma} \le k\} \cap \{\sigma = j\} \tag{4.14}$$

$$= \bigcup_{j=1}^{s} \{\tau_k \le k\} \cap \{\sigma = j\} + \bigcup_{j=s+1}^{k} \{\sigma = j\} \in \mathcal{F}_k \tag{4.15}$$

であるから，$\widehat{\sigma}$ は停止時刻である．次に

$$P(L=\sigma) \leq P(L=\widehat{\sigma}) \tag{4.16}$$

をいいたい．実際，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= P(S_\sigma = 0) && (4.17)\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(S_\sigma = 0, \sigma = k) && (4.18)\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(\sigma = k)P(S_k = 0), && (4.19)\\
(\text{右辺}) &= P(L=\tau_\sigma,\ \sigma \leq s) + P(L=\sigma,\ \sigma \geq s+1) && (4.20)\\
&= \sum_{k=1}^{s} P(\sigma = k)P(S_k = 1) + \sum_{k=s+1}^{n} P(\sigma = k)P(S_k = 0) && (4.21)
\end{aligned}$$

であるから補題 1 の (4.5) より (4.16) は成り立つ． □

定理 1 の証明． $\sigma \in \mathcal{T}_w(n)$ を固定しよう．$\sigma_{(0)} := \tau_w$ とし，帰納的に

$$\sigma_{(w)} := \begin{cases} \sigma_{(w-1)} & (\sigma_{(w-1)} = \sigma \text{ のとき}), \\ \tau_{\sigma_{(w-1)}} & (\sigma_{w-1} < \sigma \text{ のとき}) \end{cases} \tag{4.22}$$

と定める．このとき，

$$\sigma_{(n)} = \sigma \tag{4.23}$$

が成立する．さて，

$$P(L=\sigma_{(m-1)}) \geq P(L=\sigma_{(m)}),\ 1 \leq m \leq n \tag{4.24}$$

をいいたい．実際，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= P(S_{\sigma_{(m-1)}} = 0) && (4.25)\\
&= \sum_{k=w+1}^{n} P(S_{\sigma_{(w-1)}} = 0, \sigma_{(w-1)} = k) && (4.26)\\
&= \sum_{k=w+1}^{n} P(\sigma_{(m-1)} = k)P(S_k = 0) && (4.27)\\
&= \sum_{k=w+1}^{n} P(S_k = 0, \sigma_{(w-1)} = k), && (4.28)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= P(L = \tau_{\sigma(m-1)},\ \sigma_{(m-1)} < \sigma) + P(L = \sigma_{(m-1)},\ \sigma_{(m-1)} = \sigma) && (4.29)\\
&= P(S_{\sigma_{(m-1)}} = 1, I_{\tau_{\sigma_{(m-1)}}} = 1, \sigma_{(m-1)} < \sigma) + P(S_{\sigma_{(m-1)}} = 0, I_{\sigma_{(m-1)}} = 1, \sigma_{(m-1)} = \sigma) && (4.30)\\
&\le P(S_{\sigma_{(m-1)}} = 1, \sigma_{(m-1)} < \sigma) + P(S_{\sigma_{(m-1)}} = 0, \sigma_{(m-1)} = \sigma) && (4.31)\\
&= \sum_{k=w+1}^{n} P(\sigma_{(m-1)} = k,\ S_k = 1,\ k < \sigma) + \sum_{k=w+1}^{n} P(\sigma_{(m-1)} = k,\ S_k = 0,\ \sigma = k) && (4.32)\\
&= \sum_{k=w+1}^{n} P(\sigma_{(m-1)} = k,\ S_k = 1,\ \sigma \ge k+1) + \sum_{k=w+1}^{n} P(\sigma_{(m-1)} = k,\ S_k = 0,\ \sigma = k) && (4.33)
\end{aligned}
$$

$\{\sigma_{(m-1)} = k\}$，$\{\sigma \ge k+1\}$ そして $\{\sigma = k\}$ は $\mathcal{F}_k$-可測で，S_k と独立だから，

$$
\begin{aligned}
(4.33) &= \sum_{k=w+1}^{n} P(\sigma_{(m-1)} = k,\ \sigma \ge k+1)P(S_k = 1) + \sum_{k=w+1}^{n} P(\sigma_{(m-1)} = k,\ \sigma = k)P(S_k = 0) && (4.34)\\
&\le \sum_{k=w+1}^{n} P(\sigma_{(m-1)} = k,\ \sigma \ge k)P(S_k = 0) && (4.35)\\
&= \sum_{k=w+1}^{n} P(\sigma_{(m-1)} = k)P(S_k = 0) && (4.36)
\end{aligned}
$$

を得る．よって，(4.24) は成り立つ．従って，

$$
P(L = \tau_w) = P(L = \sigma_{(0)}) \ge \cdots \ge P(L = \sigma_{(n)}) = P(L = \sigma) \tag{4.37}
$$

が成り立つので，τ_w は最適ルールである．このとき最適報酬は補題 1, 補題 2 より

$$
U(\tau_w) = P(L = \tau_w) = \left(\prod_{m=w+1}^{n} q_m\right)\left(\sum_{j=w+1}^{n} r_j\right). \tag{4.38}
$$

□

参考文献

[1] 穴太克則 (2000). タイミングの数理 最適停止問題, 朝倉書店

[2] Bruss, F. T. (2000). Sum the Odds to One and Stop, *Annals of Prob.* **28**, 1384-1391.

[3] 乾仁 (2011). Bruss の最適停止定理について, 神戸大学大学院理学研究科修士論文

[4] Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmund, D. (1971). *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*. Houghton Mifflin, New York.